

2.1.2 Binární relace

Předpoklady: 2101

Pedagogická poznámka: Naprostá většina studentů vyřeší hodinu samostatně, Ti nejrychlejší potřebují tak 35 minut.

Binární relace:

Jsou dány množiny A, B . Binární relace R z A do B ($R: A \rightarrow B$) je libovolná podmnožina kartézského součinu $A \times B$.

Př. 1: Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\sqrt{2}, -\sqrt{3}\}$. Rozhodni, které z následujících množin jsou relace z A do B :

a) $M_1 = \{[1, \sqrt{2}]\}$

b) $M_2 = \{[\sqrt{2}, 1]\}$

c) $M_3 = \{[1, \sqrt{2}], [1, -\sqrt{3}], [2, -\sqrt{3}]\}$

d) $M_4 = \{\emptyset\}$

e) $M_5 = \{[1, \sqrt{2}], [1, -\sqrt{3}], [2, \sqrt{2}], [2, -\sqrt{3}], [3, \sqrt{2}], [3, -\sqrt{3}]\}$

f) $M_6 = \{[1, -\sqrt{3}], [1, \sqrt{2}]\}$

a) $M_1 = \{[1, \sqrt{2}]\}$ - je relace z A do B .

b) $M_2 = \{[\sqrt{2}, 1]\}$ - není relace z A do B , $\sqrt{2}$ není prvkem A

c) $M_3 = \{[1, \sqrt{2}], [1, -\sqrt{3}], [2, -\sqrt{3}]\}$ - je relace z A do B

d) $M_4 = \{\emptyset\}$ - je relace z A do B , prázdná množina je podmnožinou každé množiny

e) $M_5 = \{[1, \sqrt{2}], [1, -\sqrt{3}], [2, \sqrt{2}], [2, -\sqrt{3}], [3, \sqrt{2}], [3, -\sqrt{3}]\}$ - je relace z A do B

f) $M_6 = \{[1, -\sqrt{3}], [1, \sqrt{2}]\}$ - je relace z A do B

Pedagogická poznámka: Většina studentů se splete v bodě d). Jde o dobré místo ke zmínce o psaní poznámek. Snažím se studentům vysvětlit, že nestačí, pokud si v sešitu škrtnou NE a napíšou si ANO. Protože se spletli, měli by mít v sešitě i důvod, tedy poznámku typu: „prázdná množina je podmnožinou každé množiny“.

Většinou se do relace z kartézského součinu vybírají dvojice, které splňují nějakou podmínku.

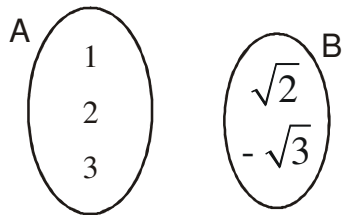
Př. 2: Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\sqrt{2}, -\sqrt{3}\}$. Urči relaci

$$R_1 = \{[x, y] \in A \times B, x > y\}.$$

$$R_1 = \{[1, -\sqrt{3}], [2, \sqrt{2}], [2, -\sqrt{3}], [3, \sqrt{2}], [3, -\sqrt{3}]\}$$

V některých případech je výhodné znázornit relaci pomocí obrázku \Rightarrow

Př. 3: Navrhni, jak graficky znázornit binární relaci R_1 množin A, B z předchozího příkladu do uvedeného obrázku.



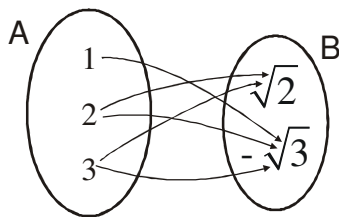
Nejdříve si ujasni, co všechno musí grafické znázornění zachytit a poté hledej realizaci jednotlivých požadavků.

Grafické znázornění musí zachytit:

- které prvky k sobě patří
- který z prvků je první

Jak to provedeme?

- prvky, které k sobě patří, spojíme šipkou
- šipka směřuje od prvního prvku k druhému



Pedagogická poznámka: Povídáme si se studenty o tom, jaký vliv na vymyšlení řešení měl fakt, že si dopředu ujasnili, jaké požadavky musí řešení splňovat. Samozřejmě poté, co si řekneme požadavky na řešení, dostanou studenti ještě čas na přemýšlení, než se odtajní výsledek.

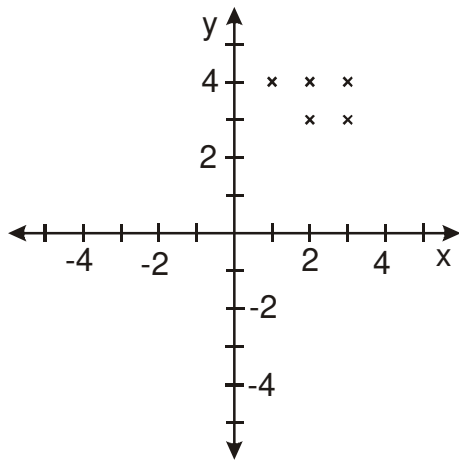
Př. 4: Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$. Urči relaci

$$R_2 = \{[x, y] \in A \times B, x + y > 4\}.$$

$$R_2 = \{[1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 3], [3, 4]\}$$

Kromě množinového zobrazení probíraného výše můžeme relace mezi čísly zobrazovat i do grafu pomocí bodů zakreslených v kartézských souřadnicích (navzájem kolmé osy x (vodorovná) a y (svislá)). Každé dvojici prvků $[x, y]$ z relace odpovídá bod o souřadnicích $[x, y]$.

Př. 5: Zakresli relaci R_2 z příkladu 4 do grafu v kartézských souřadnicích. Případné pomocné čáry kresli tečkovaně.



Pedagogická poznámka: Někteří vnímaví studenti si všimnou, že u zobrazení v kartézských souřadnicích není zcela jasné, které číslo je ve dvojici první. Připomínáme si, že způsob, jak rozlišit první číslo od druhého, může být věcí dohody, jako v tomto případě, kdy je dohodnuto, že první číslo v uspořádané dvojici zobrazujeme na vodorovnou osu x .

Někteří studenti správně vynesou body, ale pak je spojí čarou. Je třeba jim zdůraznit, že tím by relace obsahovala i další dvojice. Zároveň se bavíme o tom, že zcela automaticky se pokusili nakreslit obrázek, který je podobnější tomu, co znají.

Při zobrazování v kartézských souřadnicích vynášíme výchozí množiny na vodorovnou osu.

Př. 6: Urči relaci $R_3 = \{[x, y] \in N \times N, y = x^2, y < 5\}$. Relaci zakresli do grafu v kartézských souřadnicích.

Rozebereme zadání relace:

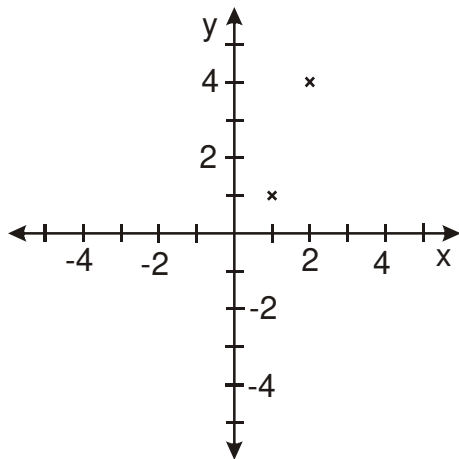
$[x, y] \in N \times N$ - relace je podmnožinou kartézského součinu přirozených čísel \Rightarrow

všechny dvojice v relaci budou sestaveny z přirozených čísel

$y = x^2$ - druhé číslo ve dvojici je druhou mocninou prvního

$y < 5$ - druhé číslo ve dvojici je menší než 5

$\Rightarrow R_3 = \{[1;1], [2;4]\}$



Pedagogická poznámka: Kromě problémů s významem písmene N v předpisu relace někteří studenti špatně odhadují vzájemnou velikost čísel x a y a píší dvojice jako $[4; 2]$.

Tento problém se často vyskytuje při sestavování rovnic, i v této situaci doporučuji rozmyslet si, které z čísel x , y je větší, nebo ověřit si výsledek dosazením.

Některé relace nemůžeme zachytit jinak než pomocí grafů.

Pedagogická poznámka: U následujícího příkladu se studenti vymlouvají na to, že ještě nikdy nic takového nedělali. Je dobré trvat na tom, že stačí: přeformulovat zadání slovně a zkusit, které body podmínkám relace vyhovují a které ne.

Př. 7: Do grafu v kartézských souřadnicích zakresli relace:

a) $R_4 = \{[x, y] \in R \times R, 1 \leq x < 4\}$

b) $R_5 = \{[x, y] \in R \times R, x > 2, y \geq -2\}$

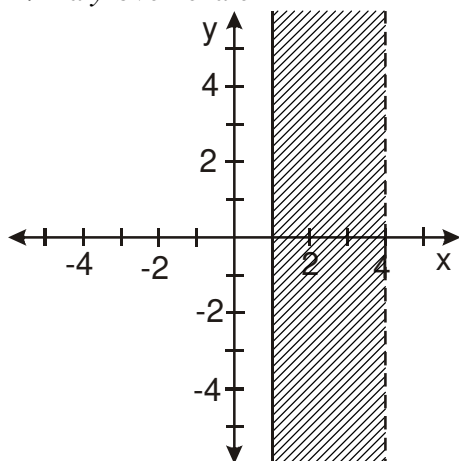
a) $R_4 = \{[x, y] \in R \times R, 1 \leq x < 4\}$

kartézský součin $R \times R =$ celá plocha grafu

vybíráme do relace $1 \leq x < 4$

\Rightarrow x -ová souřadnice bodů je rovna nebo větší než 1 a menší než 4

\Rightarrow na y -ové nezáleží

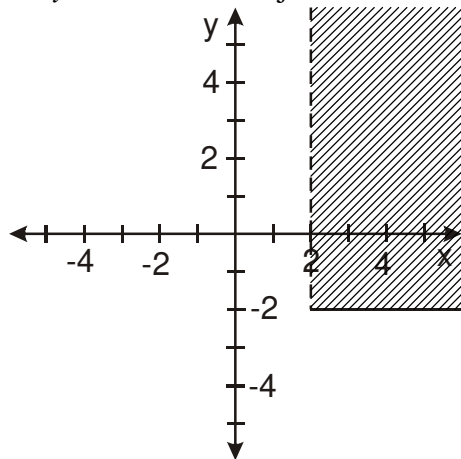


b) $R_5 = \{[x, y] \in R \times R, x > 2, y \geq -2\}$

kartézský součin $R \times R =$ celá plocha grafu
vybíráme do relace $x > 2, y > -2$

\Rightarrow x -ová souřadnice bodů je větší než 2

\Rightarrow y -ová souřadnice je větší nebo rovna -2



Pedagogická poznámka: Většina studentů rychle přijde na to, že je potřeba plochy vybarvit (pokud jim to dělá problémy, připomínám jim, že reálná čísla jsme zaváděli proto, aby na přímce nebyla prázdná místa). V druhé fázi pak vylepšujeme obrázek tak, aby v bodu a) bylo vidět, že jednička mezi naše čísla patří, zatímco 4 ne. Objevují se různé nápady (prázdná kolečka, prázdné šipky), ale požadavek na to, aby fakt, že dvojice se čtyřkou do naší relace nepatří, byl vidět v každém bodě obrázku, je dovede k čárkované čáře.

Hlavní smysl příkladu je samozřejmě v tom, aby studenti zkusili nějaké řešení, které si pak postupně kontrolují a vylepšují.

Shrnutí: Relace je libovolnou podmnožinou kartézského součinu.